Exercice 1. Prouver qu'une matrice $A \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ de rang 1 et de polynôme minimal $t(t-3)$ est semblable à

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. Parmi les assertions suivantes, lesquelles sont correctes ?

a) Si $J = J_n(\lambda)$ est un bloc de Jordan de taille n, alors $\chi_J(t) = \mu_J(t)$.

b) Une matrice $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ admet une unique valeur propre si et seulement si sa forme normale de Jordan ne contient qu'un seul bloc.

Exercice 3. Combien y a-t-il de matrices nilpotentes de taille 4×4, à similitude près (à coefficients dans un corps $\mathbb{K}$ quelconque) ?

Sauriez-vous aussi déterminer combien il y a de matrices nilpotentes de taille 5×5, à similitude près ?

(Rappelons que l'expression « à similitude près » se réfère aux classes d'équivalences pour la relation de similitude, c'est-à-dire la relation « être semblable à » pour les matrices).

Exercice 4.

1. Expliquer pourquoi une matrice diagonale est une forme normale de Jordan.
2. Trouver le polynôme caractéristique, les valeurs propres et le polynôme minimal d'un bloc de Jordan $J_m(\lambda)$.
3. Écrire toutes les matrices $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ qui sont formes normales de Jordan pour $n = 1, 2, 3$ ou 4. Dans chaque cas donner le polynôme caractéristique et le polynôme minimal.
4. Prouver que pour $n \leq 3$, deux matrices A et B de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ qui sont des formes normales de Jordan sont semblables si et seulement si elles ont exactement les mêmes blocs de Jordan, à permutation de l'ordre des blocs près.

   (Ce résultat est vrai pour les matrices de toute taille, mais la preuve générale est plus compliquée).

Exercice 5.

1. (a) Trouver deux matrices $A, B \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ telles que $\mu_A(t) = \mu_B(t) = (t-1)^2(t-2)$ mais $\chi_A(t) \neq \chi_B(t)$. De telles matrices peuvent-elles être semblables ?
2. (b) Trouver deux matrices $C, D \in \mathrm{M}_4(\mathbb{C})$ non semblables avec polynôme caractéristique $\chi_C(t) = \chi_D(t) = (t^2+1)(t^2-4t+4)$.

Exercice 6. Soit $f \in \mathscr{L}(V)$ un endomorphisme dont le polynôme caractéristique est $\chi_f(t) = (t-2)^4$ et le polynôme minimal est $\mu_f(t) = (t-2)^2$.

1. Cet endomorphisme peut-il être diagonalisable ?
2. Déterminer toutes les formes canoniques de Jordan possibles de f.

Exercice 7. Jordaniser les matrices suivantes (i.e. trouver dans chaque cas la forme normale de Jordan et une matrice de changement de base correspondante) :

$$H = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ -1 & 10 \end{pmatrix}, \qquad F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 8. Jordaniser les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 7 & 20 & -6 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 9. Soit $\mathscr{P}_m[x]$ l'espace vectoriels des fonctions polynômiales à coefficients réels de degré $\leq m$ et $D = \dfrac{d}{dx} \in \mathscr{L}\left(\mathscr{P}_m[x]\right)$ l'opérateur de dérivation. Trouver une base de Jordan de $\mathscr{P}_m[x]$ pour D.